ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ THANH TÂM

TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA HIỆU CHỈNH TIKHONOV CHO BÀI TOÁN ĐẶT KHÔNG CHỈNH PHI TUYẾN VỚI TOÁN TỬ NHIỄU ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ THANH TÂM

TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA HIỆU CHỈNH TIKHONOV CHO BÀI TOÁN ĐẶT KHÔNG CHỈNH PHI TUYẾN VỚI TOÁN TỬ NHIỄU ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành :Toán ứng dụng
Mã số : 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
C	tập con đóng lồi của H
A	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
$\mathrm{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử A
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu đến x
I	ánh xạ đơn vị

Mở đầu

Đề tài luận văn nghiên cứu phương trình toán tử dạng:

$$A(x) = f, \tag{1}$$

ở đây, A là một toán tử đơn điệu từ không gian Hilbert thực X vào không gian Hilbert thực X, f là phần tử của X. Nếu không có các điều kiện đặc biệt đặt lên toán tử A, chẳng hạn tính đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh, thì bài toán (1) nói chung là một bài toán đặt không chỉnh. Trong bài toán này, thay cho các dữ kiện chính xác $\{A, f\}$ thì ta chỉ biết các xấp xỉ $\{A_h, f_\delta\}$ của chúng. Giả sử x_δ là nghiệm của (1) với f thay bởi f_δ (giả thiết rằng nghiệm tồn tại). Khi $\delta \to 0$ thì $f_\delta \to f$ nhưng với bài toán đặt không chỉnh thì x_δ nói chung không hội tụ đến x_0-nghiệm chính xác của bài toán. Có rất nhiều phương pháp khác nhau để tìm lời giải cho bài toán này, một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov.

Mục đích của đề tài luận văn là nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiệu chỉnh bài toán đặt không chỉnh (1) trong trường hợp toán tử nhiễu đơn điệu trong không gian Hilbert: trình bày sự hội tụ của phương pháp, nghiên cứu tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh và trình bày ví dụ minh họa.

Nội dung của đề tài được viết trong hai chương. Chương 1 có tiêu đề "Phương trình toán tử đặt không chỉnh" trình bày khái niệm về không gian Hilbert thực và một số tính chất; giới thiệu về toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert và khái niệm phương trình toán tử đặt không chỉnh trong không gian Hilbert cùng một số ví dụ.

Chương 2 có tiêu đề "Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và tốc độ hội tụ" trình bày về phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán đặt không chỉnh phi tuyến trong trường hợp toán tử nhiễu đơn điệu; trình bày tốc độ hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh và ví dụ số minh họa.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy giáo, Cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K8B (khóa 2014–2016); Nhà trường và các phòng chức năng của Trường; Khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8B (khóa 2014–2016) đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Lê Thị Thanh Tâm

Chương 1

Phương trình toán tử đặt không chỉnh

Chương này giới thiệu khái niệm và ví dụ về phương trình toán tử đặt không chỉnh. Cụ thể: Mục 1.1 giới thiệu về không gian Hilbert thực và một số tính chất của không gian Hilbert; trình bày định nghĩa toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert. Mục 1.2 trình bày khái niệm và ví dụ về bài toán đặt không chỉnh; nêu khái niệm về toán tử hiệu chỉnh và ví dụ. Các kiến thức của chương này được viết trên cơ sở tổng hợp các tài liệu [1], [3] và [4].

1.1 Không gian Hilbert

1.1.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.1.1. Một tập X được gọi là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ nếu với mỗi cặp $(x,y) \in X \times X$, một phần tử của X, ta gọi là tổng của x và y, ký hiệu là $x+y$; với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ và $x \in X$, một phần tử của X, gọi là tích của α và x, ký hiệu là αx thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $x+y = y+x$ với mọi $x,y \in X$ (tính chất giao hoán);

(2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ với mọi $x,y,z \in X$ (tính chất kết hợp);

(3) tồn tại phần tử không của X, ký hiệu 0, sao cho: $x+0 = 0+x$ với mọi $x \in X$;

(4) với mọi $x \in X$, tồn tại phần tử đối của x, ký hiệu là $-x$, sao cho $x+(-x) = 0$ với mọi $x \in X$;

(5) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, với mọi $x \in X$ (1 là phần tử đơn vị);

(6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, với mọi $x \in X$;

(7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x)$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, với mọi $x \in X$;

(8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y)$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, với mọi $x, y \in X$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho H là một không gian tuyến tính trên trường số thực $\mathbb{R}$. Tích vô hướng trên không gian H là một ánh xạ đi từ tích Descartes $H \times H$ vào $\mathbb{R}$, ký hiệu là $\langle ., . \rangle$, thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in H$;

(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in H$;

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in H$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

(4) $\langle x, x \rangle > 0$ nếu $x \neq 0$ và $\langle x, x \rangle = 0$ nếu $x = 0$.

Nhận xét 1.1.3. Từ Định nghĩa 1.1.2 ta suy ra

(1) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in H$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

(2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in H$.

Định nghĩa 1.1.4. Không gian tuyến tính H cùng với một tích vô hướng trên nó được gọi là một không gian tiền Hilbert.

Định lý 1.1.5. (Bất đẳng thức Schwarz) *Trong không gian tiền Hilbert H, với mọi $x, y \in H$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Với mọi số thực α và với mọi $x, y \in H$ ta có

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle.$$

Từ đây suy ra

$$\Delta = |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0 \quad \text{với mọi} \quad x, y \in H.$$

Hay

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad \text{với mọi} \quad x,y \in H.$$

□

Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (1.1) xảy ra khi và chỉ khi x và y phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.1.6. *Không gian tiền Hilbert H là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn được xác định bởi*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad \textit{với mọi} \quad x \in H. \tag{1.2}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Chứng minh. Thật vậy, từ điều kiện (4) của Định nghĩa 1.1.2 ta có $\|x\| > 0$ nếu $x \neq 0$ và $\|x\| = 0$ nếu $x = 0$ với $x \in H$. Từ điều kiện (1) và (3) của Định nghĩa 1.1.2, ta suy ra $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và mọi $x \in H$. Từ bất đẳng thức Schwarz và cách định nghĩa chuẩn, ta có

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \quad \text{với mọi} \quad x,y \in H. \tag{1.3}$$

Từ đó với mọi $x,y \in H$ ta có

$$\begin{aligned}\langle x+y,x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi $x,y \in H$. □

Định nghĩa 1.1.7. Nếu H là một không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.2) thì H được gọi là không gian Hilbert thực.

Ví dụ 1.1.8. Không gian

$$l^2 = \left\{x = \{x_n\}_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$$

và chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 1.1.9. Không gian $L^2[a,b]$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt, \quad \forall x, y \in L^2[a,b]$$

và chuẩn

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 1.1.10. Gọi $C[a,b]$ là tập tất cả các hàm giá trị thực liên tục trên khoảng đóng hữu hạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Trong $C[a,b]$, xét tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt,\ \ x(t), y(t) \in C[a,b].$$

Không gian $C[a,b]$ với chuẩn

$$\|x\| = \Big(\int_a^b |x(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

là không gian tiền Hilbert, nhưng không phải là không gian Hilbert.

Định lý 1.1.11. *Giả sử $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy lần lượt hội tụ mạnh đến x_0, y_0 trong không gian tiền Hilbert thực H. Khi đó,*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle.$$

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ trong không gian Hilbert H.